Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

(OKE Poznań)

Poziom rozszerzony

11 stycznia 2010

Czas pracy: 180 minut

Zadanie 1 (5 pkt.)

Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 9.

Rozwiązanie

Trzy kolejne liczby naturalne możemy oznaczyć przez $n-1, n, n+1$. Zatem ich suma sześcianów jest równa

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 =$$
$$= (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3n^3 + 6n.$$

Sposób I

Ponieważ

$$3n^3 + 6n = 3n(n^2+2),$$

Wystarczy pokazać, że liczba $n(n^2+2)$ dzieli się przez 3.

Jeżeli n dzieli się przez 3, to koniec.

Jeżeli n daje resztę 1 z dzielenia przez 3, czyli $n = 3k+1$ to

$$n^2 + 2 = (3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3,$$

więc n^2+2 dzieli się przez 3.

Jeżeli natomiast n daje resztę 2 z dzielenia przez 3, czyli $n = 3k+2$ to

$$n^2 + 2 = (3k+2)^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6,$$

więc tak jak poprzednio, n^2+2 dzieli się przez 3.

Sposób II

Ponieważ

$$3n^3 + 6n = 9n^3 - (6n^3 - 6n) = 9n^3 - 6n(n^2-1) = 9n^3 - 6(n-1)n(n+1),$$

wystarczy pokazać, że $(n-1)n(n+1)$ dzieli się przez 3. To jednak jest oczywiste, bo jest to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych.

Zadanie 2 (4 pkt.)

Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają dwa warunki $a_n + a_{n+1} = \frac{-n^2+8n+40}{17}$ i $a_n - a_{n+1} = \frac{n-4}{17}$. Oblicz, które wyrazy tego ciągu są dodatnie.

Rozwiązanie

Dodając dwie dane równości stronami (żeby zredukować a_{n+1}) otrzymujemy

$$2a_n = \frac{-n^2+8n+40+n-4}{17} = \frac{-n^2+9n+36}{17}.$$

Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, wystarczy sprawdzić, kiedy dodatni jest licznik.

$$\begin{aligned}
&-n^2+9n+36 > 0 \quad / \cdot (-1)\\
&n^2-9n-36 < 0\\
&\Delta = 81+144 = 225 = 15^2\\
&n_1 = \frac{9-15}{2} = -3, \quad n_2 = \frac{9+15}{2} = 12\\
&n \in (-3, 12).
\end{aligned}$$

Ponieważ interesują nas tylko dodatnie wartości n, mamy $n = 1, 2, \ldots, 11$.

Odpowiedź: $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$

Zadanie 3 (6 pkt.)

Liczbę 255 przedstaw jako sumę czterech całkowitych składników będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego tak, aby trzeci wyraz był o 45 większy od wyrazu pierwszego.

Rozwiązanie

Szukamy rozkładu postaci

$$255 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_1q^2 &= a_1 + 45\\
a_1(q^2-1) &= 45\\
a_1 &= \frac{45}{q^2-1}.
\end{aligned}$$

Podzieliliśmy powyżej przez q^2-1, ale łatwo sprawdzać, że $q = \pm 1$ nie może spełniać warunków zadania.

Podstawiamy otrzymane wyrażenie do pierwszej równości i mamy

$$
\begin{aligned}
&a_1(1+q+q^2+q^3) = 255\\
&\frac{45(1+q+q^2+q^3)}{q^2-1} = 255 \quad / : 45\\
&\frac{1+q+q^2(1+q)}{q^2-1} = \frac{17}{3}\\
&\frac{(1+q^2)(1+q)}{(q-1)(q+1)} = \frac{17}{3}\\
&\frac{1+q^2}{q-1} = \frac{17}{3}\\
&3+3q^2 = 17q-17\\
&3q^2-17q+20 = 0\\
&\Delta = 289-240 = 49\\
&q = \frac{17-7}{6} = \frac{5}{3} \quad \vee \quad q = \frac{17+7}{6} = 4.
\end{aligned}
$$

Jeżeli $q = \frac{5}{3}$ to

$$
a_1 = \frac{45}{q^2-1} = \frac{45}{\frac{25}{9}-1} = \frac{45}{\frac{16}{9}} = \frac{405}{16}
$$

nie jest liczbą całkowitą.

Zatem $q = 4$ i mamy

$$
a_1 = \frac{45}{q^2-1} = \frac{45}{16-1} = 3,
$$

co daje szukany rozkład

$$
255 = 3+12+48+192.
$$

Odpowiedź: $255 = 3+12+48+192$

FORUM.ZADANIA.INFO

Zadanie 4 (4 pkt.)

Różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m-2)x^2-2x+1=0$ są liczby x_1 oraz x_2. Narysuj wykres funkcji $f(m) = |x_1+x_2+x_1 \cdot x_2|$.

Rozwiązanie

Skoro mamy mieć równanie kwadratowe, to musi być $m \neq 2$. Jeżeli ma mieć ono dwa różne pierwiastki, to musi być

$$\begin{aligned} & 0 < \Delta = 4 - 4(m-2) = 4 - 4m + 8 = 12 - 4m \\ & 4m < 12 \quad \iff \quad m < 3. \end{aligned}$$

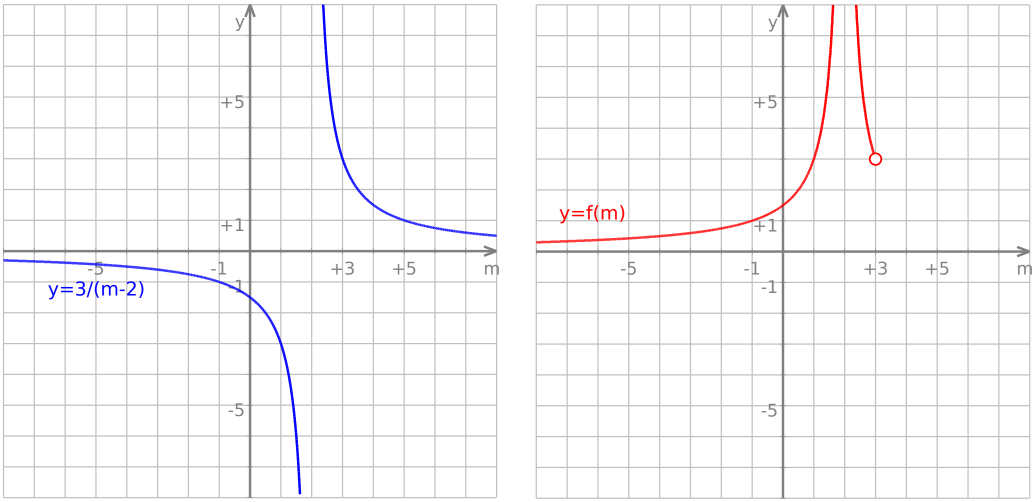
Przy powyższych założeniach możemy skorzystać ze wzorów Viète'a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2}{m-2} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{m-2}. \end{cases}$$

zatem interesująca nas funkcja ma wzór

$$f(m) = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2| = \left| \frac{2}{m-2} + \frac{1}{m-2} \right| = \left| \frac{3}{m-2} \right|.$$

Wykresem funkcji $y = \frac{3}{m-2}$ jest hiperbola $y = \frac{3}{m}$ przesunięta o 2 jednostki w prawo. Aby otrzymać funkcję $y = \left|\frac{3}{m-2}\right|$ należy część będącą pod osią Ox odbić do góry. Należy też pamiętać o obcięciu dziedziny do zbioru $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$.



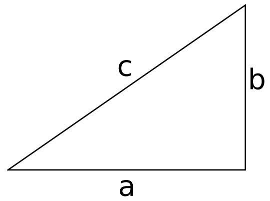
Zadanie 5 (4 pkt.)

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Jeżeli przyprostokątne trójkąta to a i b, a przeciwprostokątna c, to mamy $R = \frac{c}{2}$, bo średnicą okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest dokładnie przeciwprostokątna.

Sposób I



Promień r okręgu wpisanego możemy wyliczyć ze wzoru na pole

$$\frac{1}{2}ab = P = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

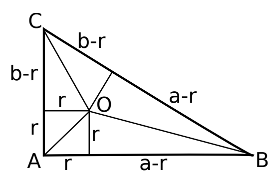
Mamy zatem

$$r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

Liczymy sumę średnic

$$\begin{aligned}
&2R + 2r = c + \frac{2ab}{a+b+c} = \\
&\frac{ac+bc+c^2+2ab}{a+b+c} = \frac{ac+bc+a^2+b^2+2ab}{a+b+c} = \\
&\frac{c(a+b)+(a+b)^2}{a+b+c} = \frac{(a+b)(c+a+b)}{a+b+c} = a+b.
\end{aligned}$$

Sposób II



Jeżeli połączymy środek O okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny ABC z jego wierzchołkami, to odcinki te dzielą kąty trójkąta na połowy. Jeżeli dorysujemy jeszcze rzuty punktu O na boki trójkąta, to mamy trzy pary przystających trójkątów prostokątnych. Oznaczając odpowiednio ich boki, widać, że

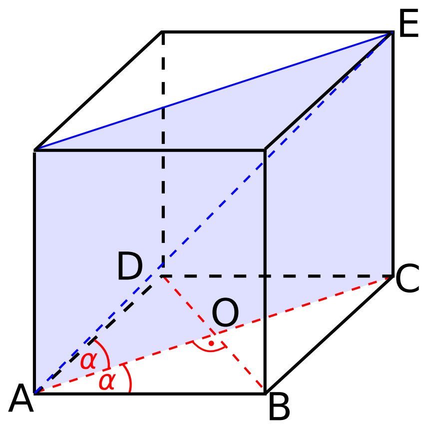
$$2R = c = (a-r) + (b-r) \quad \Rightarrow \quad 2R + 2r = a + b.$$

ZADANIE 6 (4 PKT.)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego krótsza przekątna ma długość c, a kąt ostry miarę 2α. Pole przekroju wyznaczonego przez krawędź boczną graniastosłupa i dłuższą przekątną podstawy wynosi P. Oblicz długość dłuższej przekątnej graniastosłupa, wykonaj rysunek bryły i zaznacz w nim właściwy przekrój.

Rozwiązanie

Zaczynamy oczywiście od szkicowego rysunku.



Długość przekątnej AE wyliczymy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ACE, najpierw jednak musimy wyliczyć długości odcinków AC i CE.

Ponieważ przekątne rombu są dwusiecznymi jego kątów wewnętrznych oraz przecinają się pod kątem prostym, trójkąt ABO jest trójkątem prostokątnym o kącie ostrym α. Zatem

$$\begin{aligned}
&\frac{OB}{AO} = \operatorname{tg}\alpha \\
&AO = \frac{OB}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{c}{2}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{c}{2\operatorname{tg}\alpha} \\
&AC = 2AO = \frac{c}{\operatorname{tg}\alpha}.
\end{aligned}$$

Wykorzystajmy teraz informację o podanym polu przekroju.

$$\begin{aligned}
&P = AC \cdot CE \\
&CE = \frac{P}{AC} = \frac{P}{\frac{c}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{P\operatorname{tg}\alpha}{c}.
\end{aligned}$$

Pozostało policzyć długość przekątnej AE.

$$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{c^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{P^2\operatorname{tg}^2\alpha}{c^2}} = \frac{\sqrt{c^4 + P^2\operatorname{tg}^4\alpha}}{c\operatorname{tg}\alpha}.$$

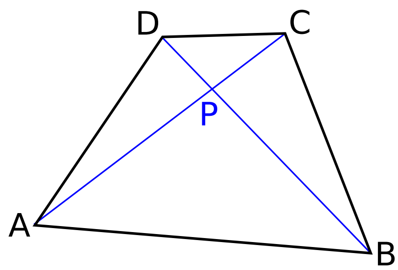
Odpowiedź: $\frac{\sqrt{c^4+P^2\operatorname{tg}^4\alpha}}{c\operatorname{tg}\alpha}$

Zadanie 7 (5 pkt.)

W czworokącie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie o współrzędnych $P = (-3,7)$ w taki sposób, że $|PC| : |AP| = |PD| : |BP| = 1 : 3$. Wiedząc, że $\overrightarrow{AC} = [4,6]$ i $\overrightarrow{BD} = [-10,-2]$, oblicz współrzędne wierzchołków tego czworokąta. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Rozwiązanie

Zaczynamy od szkicowego rysunku.



Z podanych informacji wiemy, że

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}[4,6] = \left[3, \frac{9}{2}\right].$$

$$[-3-x_A, 7-y_A] = \left[3, \frac{9}{2}\right]$$

$$\begin{cases} -3-x_A = 3 & \Rightarrow \quad x_A = -6 \\ 7-y_A = \frac{9}{2} & \Rightarrow \quad y_A = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Zatem $A = (-6, \frac{5}{2})$.

Podobnie obliczamy współrzędne pozostałych wierzchołków czworokąta.

$$[4,6] = \overrightarrow{AC} = \left[x_C+6, y_C - \frac{5}{2}\right]$$

$$\begin{cases} 4 = x_C + 6 & \Rightarrow \quad x_C = -2 \\ 6 = y_C - \frac{5}{2} & \Rightarrow \quad y_C = \frac{17}{2}. \end{cases}$$

Zatem $C = (-2, \frac{17}{2})$.

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}[-10,-2] = \left[-\frac{15}{2}, -\frac{3}{2}\right].$$

$$[-3-x_B, 7-y_B] = \left[-\frac{15}{2}, -\frac{3}{2}\right]$$

$$\begin{cases} -3-x_B = -\frac{15}{2} & \Rightarrow \quad x_B = \frac{9}{2} \\ 7-y_B = -\frac{3}{2} & \Rightarrow \quad y_B = \frac{17}{2}. \end{cases}$$

Zatem $B = (\frac{9}{2}, \frac{17}{2})$ i pozostało obliczyć wierzchołek D.

$$[-10,-2] = \overrightarrow{BD} = \left[x_D - \frac{9}{2}, y_D - \frac{17}{2}\right]$$

$$\begin{cases} -10 = x_D - \frac{9}{2} & \Rightarrow \quad x_D = -\frac{11}{2} \\ -2 = y_D - \frac{17}{2} & \Rightarrow \quad y_D = \frac{13}{2}. \end{cases}$$

Zatem $D = (-\frac{11}{2}, \frac{13}{2})$.

Fakt, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem uzasadnimy na dwa sposoby.

Sposób I

Z treści zadania wiemy, że $AP = 3PC$ i $BP = 3PD$. To oznacza, że trójkąty ABP i CPD są podobne w skali 3:1 (bo mają wspólny kąt przy wierzchołku P). Zatem

$$\measuredangle CAB = \measuredangle ACD,$$

co oznacza, że proste AB i CD są równoległe.

Sposób II

Wystarczy wykazać, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe. Liczymy

$$\overrightarrow{DC} = \left[-2 + \frac{11}{2}, \frac{17}{2} - \frac{13}{2}\right] = \left[\frac{7}{2}, 2\right]$$
$$\overrightarrow{AB} = \left[\frac{9}{2} + 6, \frac{17}{2} - \frac{5}{2}\right] = \left[\frac{21}{2}, 6\right].$$

Widać stąd, że $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{DC}$, co kończy dowód.

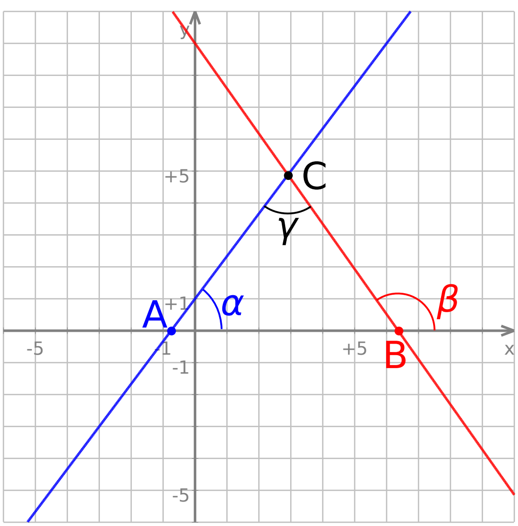
Odpowiedź: $A = (-6, \frac{5}{2}), B = (\frac{9}{2}, \frac{17}{2}), C = (-2, \frac{17}{2}), D = (-\frac{11}{2}, \frac{13}{2})$

Zadanie 8 (5 pkt.)

Wykaż, że cosinus kąta przecięcia się wykresów funkcji $f(x) = \frac{4}{3}x + 1$ i $g(x) = -x\sqrt{2} + 9$ jest równy $\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{15}$.

Rozwiązanie

Oczywiście na początku szkicujemy obrazek.



Sposób I

Zauważmy, że korzystając ze wzoru na tangens różnicy, dość łatwo jest wyliczyć tangens interesującego nas kąta. Z trójkąta ABC łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma &= \operatorname{tg}(180^\circ - (\alpha + 180^\circ - \beta)) = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \\ &= \frac{-\sqrt{2}-\frac{4}{3}}{1-\sqrt{2}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{-3\sqrt{2}-4}{3-4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+4}{-3+4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Naturalne teraz byłoby wyliczenie z tego tangens cosinusa, ale my zrobimy inaczej. Z podanego w zadaniu cosinusa wyliczymy tangens i sprawdzimy, że jest on równy powyższemu wyrażeniu. Liczymy najpierw sinus

$$\begin{aligned} \sin x &= \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{(4\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2}{15^2}} = \sqrt{1-\frac{96-24\sqrt{18}+27}{225}} = \\ &= \frac{\sqrt{225-123+72\sqrt{2}}}{15} = \frac{\sqrt{102+72\sqrt{2}}}{15}. \end{aligned}$$

Zatem tangens jest równy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{102+72\sqrt{2}}}{15}}{\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{15}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{34+24\sqrt{2}}}{4\sqrt{6}-3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{34+24\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}-3}.$$

Pozostało porównać to z wcześniej otrzymanym wyrażeniem.

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{34+24\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}-3} = \frac{3\sqrt{2}+4}{-3+4\sqrt{2}} \\ &\sqrt{34+24\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}+4 \quad /()^2 \\ &34+24\sqrt{2} = 18+24\sqrt{2}+16 \\ &0 = 0. \end{aligned}$$

Zatem wszystko się zgadza. Zauważmy, że mogliśmy równość podnieść stronami do kwadratu, bo obie strony były dodatnie.

Sposób II

Tak jak w poprzednim sposobie zauważamy, że $\gamma = \beta - \alpha$. Tym razem skorzystamy jednak ze wzoru na cosinus różnicy.

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$$

Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ oraz $\alpha < 90^\circ$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3} \quad /()^2\\
&\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{16}{9}\\
&\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{16}{9}\\
&\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{16}{9}+1 = \frac{25}{9} \quad /\sqrt{}\\
&\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}\\
&\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Podobnie wyliczamy $\sin\beta$ i $\cos\beta$. Musimy jedynie pamiętać, że $\cos\beta < 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\sqrt{2} \quad /()^2\\
&\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = 2\\
&\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta} = 2\\
&\frac{1}{\cos^2\beta} = 2+1 = 3 \quad /\sqrt{}\\
&\frac{1}{\cos\beta} = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\\
&\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{4}{5} = \\
= -\frac{3\sqrt{3}}{15} + \frac{4\sqrt{6}}{15} = \frac{-3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{15}.
\end{aligned}$$

Zadanie 9 (4 pkt.)

Oblicz wartość funkcji $f(x) = |1-2^{x-3}|$ dla argumentu

$$x = \log_{13}\left(\log_{12}^2 8 + \log_{12} 64\cdot\log_{12} 18 + \log_{12}^2 18 + 49^{\frac{1}{\log_3 7}}\right).$$

Rozwiązanie

Przekształćmy najpierw podane wyrażenie korzystając ze znanych własności logarytmów.

$$\begin{aligned}
x &= \log_{13}\left(\log_{12}^2 8+\log_{12}64\cdot\log_{12}18+\log_{12}^2 18+49^{\frac{1}{\log_3 7}}\right)= \\
&= \log_{13}\left(\log_{12}^2 8+\log_{12}8^2\cdot\log_{12}18+\log_{12}^2 18+49^{\log_7 3}\right)= \\
&= \log_{13}\left(\log_{12}^2 8+2\log_{12}8\cdot\log_{12}18+\log_{12}^2 18+\left(7^{\log_7 3}\right)^2\right)= \\
&= \log_{13}\left((\log_{12}8+\log_{12}18)^2+3^2\right)=\log_{13}\left((\log_{12}144)^2+9\right)= \\
&= \log_{13}(2^2+9)=\log_{13}13=1.
\end{aligned}$$

Zatem

$$f(1)=|1-2^{-2}|=\left|1-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}.$$

Odpowiedź: $\frac{3}{4}$

Zadanie 10 (4 pkt.)

Posługując się wykresem funkcji $f(x)=\cos 2x$ dla $x\in\left(-\pi,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$, rozwiąż nierówność $\cos 2x<\sin\alpha$ wiedząc, że miara kąta α jest równa mierze łukowej kąta środkowego okręgu opartego na $\frac{5}{12}$ okręgu.

Rozwiązanie

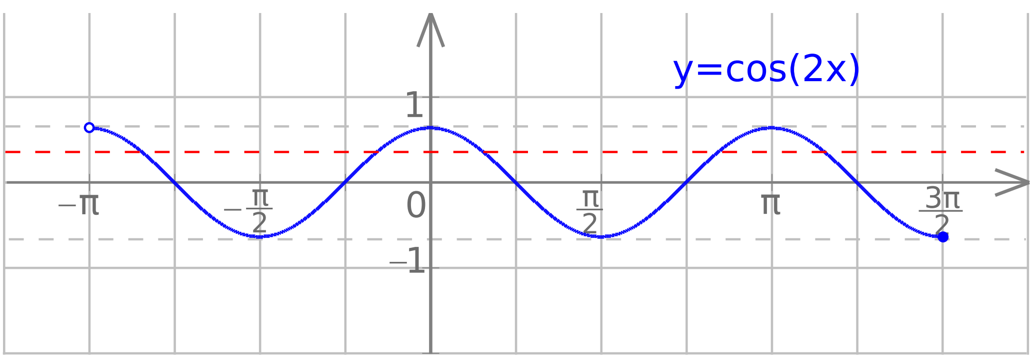
Obliczmy najpierw α – jest to $\frac{5}{12}$ kąta pełnego, czyli

$$\alpha=\frac{5}{12}\cdot 2\pi=\frac{5}{6}\pi.$$

Zatem

$$\sin\alpha=\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Teraz szkicujemy wykres $y=\cos 2x$.



Rozwiązanie nierówności $\cos 2x < \frac{1}{2}$ odczytamy z wykresu, ale najpierw zastanówmy się, gdzie funkcja $y = \cos 2x$ przecina prostą $y = \frac{1}{2}$. Zwykły cosinus przecina tę prostą w punktach $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ i $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. My mamy jednak $2x$ zamiast x, co daje nam punkty $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ i $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. Łatwo sprawdzić, że w interesującym nas przedziale jest 5 punktów tej postaci:

$$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}.$$

Teraz z obrazka odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$x \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle.$$

Odpowiedź: $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

Zadanie 11 (5 pkt.)

Liczba uczniów w klasie jest 812 razy mniejsza od liczby utworzonych z nich uporządkowanych trójek. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech osób, które są zapisane w dzienniku pod numerami pierwszym, drugim, i trzecim (uwzględniamy kolejność).

Rozwiązanie

Powiedzmy, że uczniów jest n. Zatem uporządkowanych trójek uczniów jest

$$n(n-1)(n-2)$$

(pierwszego ucznia możemy wybrać na n, drugiego na $n-1$, a trzeciego na $n-2$ sposobów). Mamy więc równanie

$$\begin{aligned} 812n &= n(n-1)(n-2) \\ 812 &= (n-1)(n-2). \end{aligned}$$

Można to równanie rozwiązać Δ-ą, ale można też zgadnąć rozwiązanie: wystarczy zauważyć, że

$$812 = 28 \cdot 29.$$

Zatem $n - 1 = 29$, czyli $n = 30$.

Zajmijmy się teraz prawdopodobieństwem. Za zdarzenia sprzyjające przyjmujemy uporządkowane trójki wylosowanych osób, więc

$$|\Omega| = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

Jest dokładnie jedno zdarzenie sprzyjające, więc szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$p = \frac{1}{24360}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{24360}$